ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ
Διδάσκων: Ι. Πουρναράς

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις

Πέμπτη 5 Σεπτεμβρίου 2019, 9-12 μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ :

Α.Μ.:

1. i) Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσης στο διάστημα $[0, 2019]$ το π.α.τ.

$$y'(x)e^{y^2(x)x^3} = x^3, \quad y(0) = 0.$$

ii) Θεωρούμε την εξίσωση $y'(x) = \frac{1}{x}y(x) + \frac{1}{x}b(x), x > 0$, με b συνεχή στο $(0, +\infty)$.

iia) Να διατυπωθούν συνθήκες ώστε για κάθε λύση y της εξίσωσης να είναι $lim_{x\to+\infty}y(x) = 0$.

iib) Να διατυπωθούν συνθήκες ώστε να υπάρχει λύση y της εξίσωσης με $lim_{x\to 0+}y(x) \in \mathbb{R}$.

2. i) Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το θεώρημα της μεταβολής των σταθερών για μια γραμμική διαφορική εξίσωση τρίτης τάξης.

iia) Με την αντικατάσταση $y = ze^{x^2}$ να λυθεί η δ.ε.

$$y''(x) - 4xy'(x) + (4x^2 - 1)y(x) = e^{x^2}, \quad x \geq 0.$$

iib) Να εξετάσετε αν υπάρχουν λύσεις της εξίσωσης α) τελικά σταθερού προσήμου β) τελικά αρνητικές γ) ταλαντούμενες δ) συγκλίνουσες σε πραγματικό αριθμό.

3. Θεωρούμε το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων $S := \{f_k(x) = x^k, x \in \mathbb{R}, k = 1, ..., n\}$.

i) Να εξετασθεί αν οι συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

ii) Να εξετασθεί αν υπάρχει γραμμική διαφορική εξίσωση της οποίας το σύνολο S να είναι βασικό σύνολο λύσεων στο $\mathbb{R}$.

iii) Να διατυπωθούν οι ορισμοί και οι προτάσεις που χρησιμοποιήθηκαν στα ερωτήματα $i), ii)$.

iv) Για την εξίσωση $y^{n+1}(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ να εξετασθεί η αλήθεια των προτάσεων :
α) υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων S_{n+1} της εξίσωσης με $S \subseteq S_{n+1}$, και
β) για αυθαίρετο $c \in \mathbb{R}$ υπάρχει λύση της εξίσωσης με $lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x^n} = c$.

4. Θεωρούμε την γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''' + y'' + 4y' + 4y = b(x), \quad x \geq 0.. \qquad \textbf{(E)}$$

i) Αν y_0 είναι η λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (E_0) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0) = 0 = y_0'(0), \quad y_0''(0) = 1,$$

να αποδειχθεί ότι μια μερική λύση της (E) είναι η

$$y_m(x) = \int_0^x y_0(x-s)b(s)ds, \quad x \geq 0.$$

ii) Αν υποτεθεί ότι $\int_0^{+\infty} |b(s)|ds < \infty$, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες.

(iii) Αν $b(x) = \frac{x+1}{x^3+1} sinx, x \geq 0$, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2y''(x) + 3xy'(x) + \lambda y(x) = 0, . \qquad \textbf{(E)}$$

i) Να επιλυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση (E) και τις συνοριακές συνθήκες $y(e) = 0 = y(1)$.

ii) Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο λύσεων στο $[0, \infty)$ το πρόβλημα αρχικών τιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση (E) και τις αρχικές συνθήκες $y(1) = 0, y'(1) = 1$.

Ζητούνται απαντήσεις σε 4 από τα θέματα 1-5.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ